XIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
Региональный этап

5 февраля 2021 г.

---

8 класс.

Первый день.

1. Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде сотен?

2. Числа x и y, не равные 0, удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy (укажите все возможности)?

3. В группе из 79 школьников у каждого не более 39 знакомых, причем у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки — знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики — поровну знакомых девочек? Все знакомства — взаимные.

4. Петя и Вася играют в игру. Вася кладёт в ряд 150 монет: некоторые «орлом» вверх, некоторые — «решкой». Петя своим ходом может показать на любые три лежащие подряд монеты, после чего Вася обязан перевернуть какие-то две монеты из этих трёх по своему выбору. Петя хочет, чтобы как можно больше монет лежали «решкой» вверх, а Вася хочет ему помешать. При каком наибольшем k Петя сможет независимо от действий Васи добиться того, чтобы хотя бы k монет лежали «решкой» вверх?

5. CL — биссектриса треугольника ABC. $CLBK$ — параллелограмм. Прямая AK пересекает отрезок CL в точке P. Оказалось, что точка P равноудалена от диагоналей параллелограмма $CLBK$. Докажите, что $AK \geq CL$.

Замечание. В выданных участником условиях слов «не равные 0» в условии задачи 2 по недосмотру составителей не было. Но при проверке за отсутствие в решении рассмотрения случая, когда хотя бы одно из чисел x, y равно 0, оценка не снижалась.